Subgrupos

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Estruturas Algébricas II - 2014.2

7 de março de 2015

Sumário

Definição (Subgrupo)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* H *um subconjunto de* G. *Dizemos que* H *é um* **subgrupo** *de* G *e escrevemos* $H \leq G$ *se* H *é um grupo com a operação* $*$. *Quando* H *é um subconjunto próprio, podemos escrever* $H < G$.

Exemplos:

Definição (Subgrupo)

Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto de G. Dizemos que H é um **subgrupo** *de G e escrevemos $H \leq G$ se H é um grupo com a operação $*$. Quando H é um subconjunto próprio, podemos escrever $H < G$.*

Exemplos:

- $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{R}, +)$

Definição (Subgrupo)

Seja $(G, *)$ um grupo e H um subconjunto de G. Dizemos que H é um **subgrupo** *de G e escrevemos $H \leq G$ se H é um grupo com a operação $*$. Quando H é um subconjunto próprio, podemos escrever $H < G$.*

Exemplos:

- $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{Q}_{+}, \cdot)$ não é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Definição (Subgrupo Impróprio)

Se $(G, *)$ *é um grupo, então* G *é um subgrupo* **impróprio** *de* G*.*
Todos os demais são subgrupos próprios.

Definição (Subgrupo Impróprio)

Se $(G, *)$ *é um grupo, então* G *é um subgrupo* **impróprio** *de* G*. Todos os demais são subgrupos próprios.*

Definição (Subgrupos Triviais)

Todo grupo admite pelo menos dois subgrupos; ele próprio e $H = \{e\}$*, onde e constituído pelo elementro neutro de* G*. Tais subgrupos são chamados* **triviais***.*

Exemplo

Considere o grupo $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$ *com a soma usual de vetores e o subconjunto*

$$H = \{(0, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se $H \leq G$*?*

Exemplo

Considere o grupo $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R}\}$ *com a soma usual de vetores e o subconjunto*

$$H = \{(0, x_2, ..., x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se $H \leq G$*?*

- H é fechado para a operação de G?

Exemplo

Considere o grupo $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$ *com a soma usual de vetores e o subconjunto*

$$H = \{(0, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se $H \leq G$*?*

- H é fechado para a operação de G?
- Vale a associatividade?

Exemplo

Considere o grupo $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$ *com a soma usual de vetores e o subconjunto*

$$H = \{(0, x_2, ..., x_n)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se $H \leq G$*?*

- H é fechado para a operação de G?
- Vale a associatividade?
- Existe elemento neutro e em $(H, +)$?

Exemplo

Considere o grupo $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R}\}$ *com a soma usual de vetores e o subconjunto*

$$H = \{(0, x_2, ..., x_n) \ ; \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Tem-se $H \leq G$*?*

- H é fechado para a operação de G?
- Vale a associatividade?
- Existe elemento neutro e em $(H, +)$?
- Para cada $u \in H$, existe $u' \in H$ tal que $u + u' = e$?

Exemplo

Considere a tabela de operações de $(\mathbb{Z}_4, +)$

$\mathbb{Z}_4$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Que subgrupos conseguimos identificar?

Exemplo

Considere a tabela de operações do grupo de Klein $(V, *)$, *onde* $V = \{e, a, b, c\}$

V:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Que subgrupos conseguimos identificar?

Teorema (Caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,*

1. H *é fechado para a operação de* G*;*
2. $e_G \in H$*;*
3. *Se* $a \in H$ *então* $a^{-1} \in H$*.*

Prova:

Teorema (Caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e $H \subset G$. Então, $H \leq G$ se, e somente se,

1. *H é fechado para a operação de G;*
2. *$e_G \in H$;*
3. *Se $a \in H$ então $a^{-1} \in H$.*

Prova:

($\Rightarrow$) Se H é um subgrupo de G, então H é um grupo (dentro de G) e obviamente as sentenças 1, 2 e 3 são verdadeiras;

Teorema (Caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,*

1. H *é fechado para a operação de* G*;*
2. $e_G \in H$*;*
3. *Se* $a \in H$ *então* $a^{-1} \in H$*.*

Prova:

($\Rightarrow$) Se H é um subgrupo de G, então H é um grupo (dentro de G) e obviamente as sentenças 1, 2 e 3 são verdadeiras;

($\Leftarrow$) Agora, vamos mostrar que se H é um subconjunto de G e atende as condições 1, 2 e 3, então $H \leq G$.

Teorema (Caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e $H \subset G$. Então, $H \leq G$ se, e somente se,

1. *H é fechado para a operação de G;*
2. *$e_G \in H$;*
3. *Se $a \in H$ então $a^{-1} \in H$.*

Prova:

$(\Rightarrow)$ Se H é um subgrupo de G, então H é um grupo (dentro de G) e obviamente as sentenças 1, 2 e 3 são verdadeiras;

$(\Leftarrow)$ Agora, vamos mostrar que se H é um subconjunto de G e atende as condições 1, 2 e 3, então $H \leq G$.

De 2, vemos que H possui elemento neutro; De 3, vemos que cada elemento de H admite simétrico. Resta ver que $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer $x, y, z \in H$. Isso decorre de $x, y, z \in H$ implicar que $x, y, z \in G$.

■

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$. *Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$.

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

A associatividade em H ocorre, pois $H \subset G$ e em G vale associativade.

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

A associatividade em H ocorre, pois $H \subset G$ e em G vale associativade.

O elemento neutro de G está em H pois se $a \in H$ então $a * a^{-1} \in H$, ou seja, $e \in H$.

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

A associatividade em H ocorre, pois $H \subset G$ e em G vale associativade.

O elemento neutro de G está em H pois se $a \in H$ então $a * a^{-1} \in H$, ou seja, $e \in H$.

Se o elemento neutro está em H então para cada $a \in H$ vale que $e * a^{-1} \in H$, ou seja, $a^{-1} \in H$.

Teorema (Outra caracterização de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H \subset G$*. Então,* $H \leq G$ *se, e somente se,* $a * b^{-1} \in H$ *para quaisquer* $a, b \in H$*.*

Prova:

$(\Rightarrow)$ Seja $H \subset G$. Então H é fechado para a operação de G e para cada $b \in H$ existe b^{-1} também em H. Logo, se $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$ e portanto $a * b^{-1} \in H$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponha que H é um subconjunto de G tal que $a * b^{-1} \in H$ para quaisquer $a, b \in H$.

A associatividade em H ocorre, pois $H \subset G$ e em G vale associativade.

O elemento neutro de G está em H pois se $a \in H$ então $a * a^{-1} \in H$, ou seja, $e \in H$.

Se o elemento neutro está em H então para cada $a \in H$ vale que $e * a^{-1} \in H$, ou seja, $a^{-1} \in H$.

Por fim, H é fechado para a operação de G, pois dados $a, b \in H$ tem-se que $b^{-1} \in H$. Portanto, $a * (b^{-1})^{-1} \in H$, isto é, $a * b \in H$.

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e H, K subgrupos de G. Então, $H \cap K \leq G$.

Prova:

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e H, K subgrupos de G. Então, $H \cap K \leq G$.

Prova:

Devemos mostrar que dados $a, b \in H \cap K$ tem-se $a * b^{-1} \in H \cap K$

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e H, K subgrupos de G. Então, $H \cap K \leq G$.

Prova:

Devemos mostrar que dados $a, b \in H \cap K$ tem-se $a * b^{-1} \in H \cap K$

Sejam $a, b \in H \cap K$. Então $a \in H$ e $a \in K$. Da mesma forma, $b \in H$ e $b \in K$

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e H, K subgrupos de G. Então, $H \cap K \leq G$.

Prova:

Devemos mostrar que dados $a, b \in H \cap K$ tem-se $a * b^{-1} \in H \cap K$

Sejam $a, b \in H \cap K$. Então $a \in H$ e $a \in K$. Da mesma forma, $b \in H$ e $b \in K$

Se $a, b \in H$ então $a * b^{-1} \in H$, pois $H \leq G$.

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* H, K *subgrupos de* G. *Então,* $H \cap K \leq G$.

Prova:

Devemos mostrar que dados $a, b \in H \cap K$ tem-se $a * b^{-1} \in H \cap K$

Sejam $a, b \in H \cap K$. Então $a \in H$ e $a \in K$. Da mesma forma, $b \in H$ e $b \in K$

Se $a, b \in H$ então $a * b^{-1} \in H$, pois $H \leq G$.

Da mesma forma, se $a, b \in K$, então $a * b^{-1} \in K$.

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ um grupo e H, K subgrupos de G. Então, $H \cap K \leq G$.

Prova:

Devemos mostrar que dados $a, b \in H \cap K$ tem-se $a * b^{-1} \in H \cap K$

Sejam $a, b \in H \cap K$. Então $a \in H$ e $a \in K$. Da mesma forma, $b \in H$ e $b \in K$

Se $a, b \in H$ então $a * b^{-1} \in H$, pois $H \leq G$.

Da mesma forma, se $a, b \in K$, então $a * b^{-1} \in K$.

Ora, mas se $a * b^{-1} \in H$ e $a * b^{-1} \in K$, então $a * b^{-1} \in H \cap K$

■

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

O conjunto $H = \{(0, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

O conjunto $H = \{(0, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $K = \{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ também é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

O conjunto $H = \{(0, y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $K = \{(x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ também é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

A união é o conjunto dos pares da ordenados da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$.

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

O conjunto $H = \{(0, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $K = \{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ também é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

A união é o conjunto dos pares da ordenados da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$.

Por exemplo, $(3, 0), (0, -2) \in H \cup K$. Mas $(1, 2) \notin H \cup K$.

Observação (União de Subgrupos)

A união de subgrupos pode não ser subgrupo

Prova:

Considere o $\mathbb{R}^2$, que é grupo com a operação $+$.

O conjunto $H = \{(0, y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $K = \{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ também é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

A união é o conjunto dos pares da ordenados da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$.

Por exemplo, $(3, 0), (0, -2) \in H \cup K$. Mas $(1, 2) \notin H \cup K$.

Veja que ao somarmos os elementos $(3, 0)$ e $(0, -2)$ (com a operação de $G = \mathbb{R}^2$), obteremos um elemento que não é da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$. Daí, $H \cup K$ **não é fechado** para a operação de G, não sendo, portanto, subgrupo.

■

Teorema (Interseção de Subgrupos)

Seja $(G, *)$ *um grupo e* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *subgrupos de* G*. Então,*

$$H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n \leq G$$

Exercício

Seja $(G, *)$ *um grupo abeliano e* H, K *subgrupos de* G. *Então,*

$$HK = \{x * y \ ; \ x \in H, y \in K\} \leq G$$

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)$ e φ é uma bijeção.

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \ ; \ y = \varphi(x) \text{ com } x \in H\}$

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \; ; \; y = \varphi(x) \; com \; x \in H\}$
- **Devemos mostrar que** $\varphi(H) \leq G'$

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \ ; \ y = \varphi(x) \ com \ x \in H\}$
- **Devemos mostrar que** $\varphi(H) \leq G'$
- Sejam $u, v \in \varphi(H)$. Então $u = \varphi(a)$ e $v = \varphi(b)$ onde $a, b \in H$.

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \; ; \; y = \varphi(x) \text{ com } x \in H\}$
- **Devemos mostrar que** $\varphi(H) \leq G'$
- Sejam $u, v \in \varphi(H)$. Então $u = \varphi(a)$ e $v = \varphi(b)$ onde $a, b \in H$.
- Assim, $u\blacktriangle v^{-1} = \varphi(a)\blacktriangle[\varphi(b)]^{-1}$

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x)\blacktriangle\varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \ ; \ y = \varphi(x) \ com \ x \in H\}$
- **Devemos mostrar que** $\varphi(H) \leq G'$
- Sejam $u, v \in \varphi(H)$. Então $u = \varphi(a)$ e $v = \varphi(b)$ onde $a, b \in H$.
- Assim, $u\blacktriangle v^{-1} = \varphi(a)\blacktriangle[\varphi(b)]^{-1}$
- $u\blacktriangle v^{-1} = \varphi(a)\blacktriangle\varphi(b^{-1}) = \varphi(a * b^{-1})$

Exercício

Sejam $(G, *)$ e $(\Omega, \blacktriangle)$ grupos e φ um isomorfismo entre tais grupos. Mostre que φ transforma subgrupo em subgrupo.

Prova:

- Seja $\varphi : G \longrightarrow \Omega$ um isomorfismo, isto é, um homomorfismo sobrejetor.
- Então $\varphi(x * y) = \varphi(x) \blacktriangle \varphi(y)$ e φ é uma bijeção.
- Se $H \leq G$ então $\varphi(H) = \{y \in G' \; ; \; y = \varphi(x) \text{ com } x \in H\}$
- **Devemos mostrar que** $\varphi(H) \leq G'$
- Sejam $u, v \in \varphi(H)$. Então $u = \varphi(a)$ e $v = \varphi(b)$ onde $a, b \in H$.
- Assim, $u \blacktriangle v^{-1} = \varphi(a) \blacktriangle [\varphi(b)]^{-1}$
- $u \blacktriangle v^{-1} = \varphi(a) \blacktriangle \varphi(b^{-1}) = \varphi(a * b^{-1})$
- Ou seja, $u \blacktriangle v^{-1}$ é imagem de um elemento de H e, portanto, $u \blacktriangle v^{-1} \in \varphi(H)$

$\blacksquare$

Exercício

Seja $(G, *)$ *um grupo e* a *um elemento de* G*. Mostrar que*

$$H_a = \{x \in G \ ; \ x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G*.*

Prova:

Exercício

Seja $(G, *)$ *um grupo e a um elemento de* G*. Mostrar que*

$$H_a = \{x \in G \; ; \; x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G*.*

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$

Exercício

Seja $(G, *)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \; ; \; x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$

Exercício

Seja $(G, *)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \; ; \; x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$
- Se $x \in H_a$, então $x * a = a * x$. Da mesma forma, se $y \in H_a$ então $y * a = a * y$.

Exercício

Seja $(G, *)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \; ; \; x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$
- Se $x \in H_a$, então $x * a = a * x$. Da mesma forma, se $y \in H_a$ então $y * a = a * y$.
- Daí, $x = a * x * a^{-1}$ e $a^{-1} * y * a = y$

Exercício

Seja $(G,*)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \; ; \; x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$
- Se $x \in H_a$, então $x * a = a * x$. Da mesma forma, se $y \in H_a$ então $y * a = a * y$.
- Daí, $x = a * x * a^{-1}$ e $a^{-1} * y * a = y$
- Da segunda igualdade, temos: $y^{-1} = (a^{-1} * y * a)^{-1} = a^{-1} * y^{-1} * a$

Exercício

Seja $(G, *)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \ ; \ x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$
- Se $x \in H_a$, então $x * a = a * x$. Da mesma forma, se $y \in H_a$ então $y * a = a * y$.
- Daí, $x = a * x * a^{-1}$ e $a^{-1} * y * a = y$
- Da segunda igualdade, temos: $y^{-1} = (a^{-1} * y * a)^{-1} = a^{-1} * y^{-1} * a$
- Assim,
  $(x * y^{-1}) * a = ((a * x * a^{-1}) * y^{-1}) * a = a * x * (a^{-1} * y^{-1} * a)$

Exercício

Seja $(G, *)$ um grupo e a um elemento de G. Mostrar que

$$H_a = \{x \in G \ ; \ x * a = a * x\}$$

é um subgrupo de G.

Prova:

- Devemos mostrar que para $x, y \in H_a$ tem-se $x * y^{-1} \in H_a$
- Isto é: $(x * y^{-1}) * a = a * (x * y^{-1})$
- Se $x \in H_a$, então $x * a = a * x$. Da mesma forma, se $y \in H_a$ então $y * a = a * y$.
- Daí, $x = a * x * a^{-1}$ e $a^{-1} * y * a = y$
- Da segunda igualdade, temos: $y^{-1} = (a^{-1} * y * a)^{-1} = a^{-1} * y^{-1} * a$
- Assim,
  $(x * y^{-1}) * a = ((a * x * a^{-1}) * y^{-1}) * a = a * x * (a^{-1} * y^{-1} * a)$
- $(x * y^{-1}) * a = a * x * y^{-1} = a * (x * y^{-1})$