UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
Coordenação de Matemática
Lista 07 - Estruturas Algébricas II - 2014.2
Professor Márcio Nascimento

Grupos Cíclicos

Teorema 1 *Seja G um grupo e $a \in G$. Então*

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

é um subgrupo de G e é o menor subgrupo de G que contem a, isto é, todo subgrupo de G contendo a, contém H.

Definição 2 (Subgrupo Cíclico) *Seja G um grupo e $a \in G$. Então, o subgrupo $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ caracterizado no Teorema acima é chamado **subgrupo cíclico de** G **gerado por** a e será denotado por $\langle a \rangle$.*

Definição 3 (Gerador) *Um elemento a de um grupo G **gera** G e é um gerador para G se $\langle a \rangle = G$. Um grupo é dito **cíclico** se existe algum elemento a em G que gera G.*

1. Escreva pelo menos 5 elementos de cada grupo cíclico a seguir:
   (a) $(25\mathbb{Z}, +)$
   (b) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

2. Descreva o subgrupo cíclico de $GL(2, \mathbb{R})$ gerado pelas matrizes a seguir:
   (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

3. Quais dos seguintes grupos são cíclicos? Para cada grupo cíclico, liste todos os geradores:
   (a) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $G_3 = (Q^+, \cdot)$, $G_4 = (6\mathbb{Z}, +)$
   (b) $G_5 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $G_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

4. Mostre que todo grupo cíclico é abeliano.

5. Sejam $a \in G$ com $o(a) = n \geq 1$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se $a^m = e$, então $n|m$

6. Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo cíclico de ordem n. Mostre que para cada divisor d de n, existe $x \in G$ com $o(x) = d$.

7. Encontrar:
   (a) O subgrupo cíclico de $\mathbb{Z}_{30}$ gerado por 25.
   (b) O subgrupo cíclico de $\mathbb{Z}_{42}$ gerado por 30.
   (c) O subgrupo cíclico $\langle i \rangle$ do grupo $\mathbb{C}^*$ com a operação multiplicação.
   (d) O subgrupo cíclico $\langle \frac{1+i}{\sqrt{2}} \rangle$ do grupo do item anterior.
   (e) O subgrupo cíclico $\langle 1 + i \rangle$ do grupo do item anterior.

8. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_{18}, +)$.

   (a) Encontre os geradores de $\mathbb{Z}_{18}$ usando o exercício 2, item b.

   (b) Para cada $x \in \mathbb{Z}_{18}$ que **não** gera $\mathbb{Z}_{18}$ encontre $\langle x \rangle$ e seus geradores.

   (c) Para cada subgrupo encontrado no item anterior, repita o processo do item b, isto é, para cada $y \in \langle x \rangle$ **não** gerador de $\langle x \rangle$ encontre $\langle y \rangle$ e seus geradores.

   (d) Repita o processo até onde possível.

9. Considere as raízes da unidade em $(\mathbb{C}, \cdot)$, isto é, o conjunto de números complexos $U_n = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ tais que $w_i^n = 1$.

   (a) Mostre que U_n é um grupo cíclico.

   (b) Uma raiz n-ésima w é dita **primitiva** quando $w^k = 1$ se, e somente se, $k = n$. Conclua que os geradores de U_n são as raízes primitivas.

10. Sejam a, b elementos de um grupo G. Mostre que se ab tem ordem finita n, então ba também tem ordem n.