UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
Coordenação de Matemática
Lista 06 - Estruturas Algébricas II - 2014.2 - Subgrupos
Professor Márcio Nascimento

UNIVERSIDADE ESTADUAL
VALE DO ACARAÚ

1. Considerando o grupo aditivo dos números complexos, verifique se cada conjunto dado é um subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.
   (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^+$, $7\mathbb{Z}$, $i\mathbb{R}$, $\pi\mathbb{Q}$.
   (b) $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

2. Na questão anterior, faça o mesmo considerando o grupo multiplicativo dos complexos não nulos.

3. Considerando o conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes quadradas e invertíveis de ordem $n \times n$ com entradas reais (com a multiplicação usual de matrizes), verifique se há subgrupo em cada caso:
   (a) Matrizes de ordem $n \times n$ com determinante igual a 2.
   (b) Matrizes diagonais de ordem $n \times n$ sem zeros na diagonal principal.
   (c) Matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sem zeros na diagonal principal.
   (d) Matrizes de ordem $n \times n$ com determinante igual a -1.
   (e) Matrizes de ordem $n \times n$ com determinante igual a -1 ou 1.
   (f) Matrizes Ortogonais[1] de ordem $n \times n$

4. Com os nove grupos abaixo, verifique se $G_i \leq G_j$ para cada i e para cada j entre 1 e 9:

   $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$
   $G_2 = (12\mathbb{Z}, +)$
   $G_3 = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$
   $G_4 = (\mathbb{R}, +)$
   $G_5 = (\mathbb{R}^+, \cdot)$
   $G_6 = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ com a multiplicação usual dos números reais.
   $G_7 = (3\mathbb{Z}, +)$
   G_8: conjunto de todos os inteiros múltiplos de 6 com a adição usual dos inteiros.
   $G_9 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ com a multiplicação usual.

5. Seja G um grupo e a um elemento de G. Mostre que

$$H_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

   é um subgrupo de G.

[1]Uma matriz é ortogonal quando $A^T A = I_n$

6. Seja H um subgrupo de um grupo G. Para $a, b \in G$, defina: $a \sim b$ se, e somente se, $ab^{-1} \in H$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

7. Sejam H, K subgrupos de um grupo G.

   (a) Mostre que $H \cap K \leq G$.

   (b) O resultado pode ser generalizado para n subgrupos de G?

8. Na questão anterior, se considerarmos a união em vez da interseção, o que pode ser dito?