UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ
Coordenação de Matemática
Lista 04 - Estruturas Algébricas II - 2014.2
Professor Márcio Nascimento
Operações Binárias

Definição 1 (Operação Binária) *Uma operação binária $*$ em um conjunto S é uma função que associa a cada par de elementos (a, b), com $a, b \in S$ um outro elemento $a * b$ também em S.*

Exemplos:

(1) A soma e a multiplicação usuais em $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} e \mathbb{C}$.

(2) A soma de matrizes no conjunto de TODAS as matrizes com entradas reais, não é uma operação binária. Por exemplo, não é possível somar matrizes de ordem diferentes.

Definição 2 (Subconjunto fechado para a operação do conjunto) *Seja $*$ uma operação binária em um conjunto S e $H \subset S$. O subconjunto S é fechado para a operação $*$ se para quaisquer $a, b \in H$ tem-se $a * b \in H$.*

Exemplos:

(1) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}$. Se a, b são inteiros não negativos, o produto $a.b$ certamente é não negativo. Assim, $\mathbb{Z}_+$ é fechado para o produto.

(2) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}$ mas $\mathbb{Z}_-$ não é fechado para o produto. Veja que $(-5).(-4) \notin \mathbb{Z}_-$

Definição 3 (Operação binária comutativa) *Uma operação binária $*$ em um conjunto S é comutativa se $a * b = b * a$ para quaisquer $a, b \in S$.*

Exemplos:

(1) A soma usual de números complexos é comutativa: para quaisquer $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ tem-se $(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$.

(2) Defina a operação $*$ em $\mathbb{Z}$ da seguinte forma: $x * y = x$. Veja que $2 * 3 = 2$ mas $3 * 2 = 3$. Portanto, esta não é uma operação comutativa.

Definição 4 (Operação binária associativa) *Uma operação binária $*$ em um conjunto S é associativa se $a * (b * c) = (a * b) * c$ para quaisquer $a, b, c \in S$.*

Exemplos:

(1) A operação definida por $x * y = x$ em $\mathbb{Z}$ é associativa:

$$a * (b * c) = a * b = a$$

$$(a * b) * c = a * c = a$$

(2) Já a operação $x * y = min\{x, y\}$ definida em $\mathbb{R}$ não é associativa:

$$3 * (1 * 4) = 3 * 1 = 3$$

$$(3 * 1) * 4 = 1 * 4 = 1$$

1. Verifique se a operação binária $*$ definida é comutativa e associativa.

   (a) $a * b = a - b$ em $\mathbb{Z}$

   (b) $a * b = ab + 1$ em $\mathbb{Q}$

   (c) $a * b = ab/2$ em $\mathbb{Q}$

   (d) $a * b = 2^{ab}$ em $\mathbb{Z}_+$

   (e) $a * b = a^b$ em $\mathbb{Z}_+$

2. Verdadeiro ou falso?

   a. ( ) Se $*$ é uma operação binária em um conjunto S, então $a * a = a$ para todo $a \in S$.

   b. ( ) Se $*$ é uma operação binária comutativa em um conjunto S então $a * (b * c) = (b * c) * a$ para quaisquer $a, b, c \in S$.

   c. ( ) Se $*$ é uma operação binária associativa em um conjunto S então $a * (b * c) = (b * c) * a$ para quaisquer $a, b, c \in S$.

   d. ( ) Uma operação binária $*$ definida em um conjunto S é comutativa se existem $a, b \in S$ tais que $a * b = b * a$

   e. ( ) Uma operação binária em um conjunto S associa pelo menos um elemento de S a cada par de elementos de S.

   f. ( ) Uma operação binária em um conjunto S associa no máximo um elemento de S a cada par de elementos de S.

   g. ( ) Uma operação binária em um conjunto S associa exatamente um elemento de S a cada par de elementos de S.

   h. ( ) Uma operação binária em um conjunto S pode associar mais que um elemento de S a algum par de elementos de S.

3. Exiba um conjunto qualquer **não numérico** e defina duas operações binárias ($*$ e $\blacktriangle$) nesse conjunto.

4. Prove que se $*$ é uma operação binária associativa e comutativa em um conjunto S, então

$$(a * b) * (c * d) = [(d * c) * a] * b]$$

   para quaisquer $a, b, c, d \in S$

5. Prove ou dê um contra-exemplo:

   (a) Toda operação binária em um conjunto que consiste de apenas um elemento é comutativa e associativa.

   (b) Toda operação binária comutativa em um conjunto que contém exatamente dois elementos, é associativa.

6. Suponha que $*$ é uma operação binária associativa em um conjunto S. Seja

$$H = \{a \in S \ ; \ a * x = x * a, \text{para todo } x \in S\}$$

   Mostre que H é fechado para a operação $*$.

7. Suponha que $*$ é uma operação binária comutativa e associativa em um conjunto S. Mostre que

$$H = \{a \in S \ ; \ a * a = a\}$$

   é fechado para a operação $*$ [Os elementos de H são ditos idempotentes].