Classes Laterais

Prof. Márcio Nascimento

marcio@matematicauva.org

Universidade Estadual Vale do Acaraú
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Estruturas Algébricas II - 2014.2

23 de março de 2015

Classes Laterais

Teorema (Classe Lateral à esquerda)

Seja H um subgrupo de G e considere a relação $\sim_E$ definida em G por

$$a \sim_E b \Longleftrightarrow a^{-1}b \in H$$

Tal relação, é uma Relação de Equivalência em G.

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

- Seja $a \in G$. Então $a^{-1}a = e \in H$, isto é, $a \sim_E a$.

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

- Seja $a \in G$. Então $a^{-1}a = e \in H$, isto é, $a \sim_E a$.
- Sejam $a, b \in G$ tais que $a \sim_E b$. Então $a^{-1}b \in H$, sendo $H \leq G$.

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

- Seja $a \in G$. Então $a^{-1}a = e \in H$, isto é, $a \sim_E a$.
- Sejam $a, b \in G$ tais que $a \sim_E b$. Então $a^{-1}b \in H$, sendo $H \leq G$.
- Daí, $(a^{-1}b)^{-1}$ também está em H, ou seja $b^{-1}a \in H$ e portanto $b \sim_E a$

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

- Seja $a \in G$. Então $a^{-1}a = e \in H$, isto é, $a \sim_E a$.
- Sejam $a, b \in G$ tais que $a \sim_E b$. Então $a^{-1}b \in H$, sendo $H \leq G$.
- Daí, $(a^{-1}b)^{-1}$ também está em H, ou seja $b^{-1}a \in H$ e portanto $b \sim_E a$
- Sejam $a, b, c \in G$ tais que $a \sim_E b$ e $b \sim_E c$. Então $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$.

Prova do Teorema

Devemos verificar a Reflexividade, Simetria e Transitividade da relação $\sim_E$.

- Seja $a \in G$. Então $a^{-1}a = e \in H$, isto é, $a \sim_E a$.
- Sejam $a, b \in G$ tais que $a \sim_E b$. Então $a^{-1}b \in H$, sendo $H \leq G$.
- Daí, $(a^{-1}b)^{-1}$ também está em H, ou seja $b^{-1}a \in H$ e portanto $b \sim_E a$
- Sejam $a, b, c \in G$ tais que $a \sim_E b$ e $b \sim_E c$. Então $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$.
- Sendo H um subgrupo, temos que $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in H$, isto é, $a^{-1}c \in H$ e $a \sim_E c$.

$\blacksquare$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_E a\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_E a\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x \in H\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_E a\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x \in H\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_E a\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x \in H\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x = ah, \text{para algum} \ \ h \in H\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Se $\sim_E$ é uma Relação de Equivalência em G, então $\sim_E$ particiona o grupo G. Vejamos as classes!

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a?
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_E a\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x \in H\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ a^{-1}x = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x = ah, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- Denotaremos esta classe por aH e a chamaremos **Classe Lateral à Esquerda de H contendo** a.

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Exemplo

Considere o grupo aditivo dos números reais e o subgrupo $H = \{2k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$. *Determine a classe lateral* aH *sendo* $a = \dfrac{1}{3}$.

Classes de Equivalência geradas por $\sim_E$

Exemplo

Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}_8$ *e o subgrupo* $H = \langle \overline{2} \rangle$. *Exiba as classes laterais à esquerda de* H.

Teorema (Classe Lateral à direita)

Seja H um subgrupo de G e considere a relação $\sim_D$ definida em G por

$$a \sim_D b \Longleftrightarrow ab^{-1} \in H$$

Tal relação, é uma Relação de Equivalência em G.

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G.
São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G. São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G.
São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_D a\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G. São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_D a\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} \in H\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G. São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_D a\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} \in H\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G. São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_D a\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} \in H\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- $\bar{a} = \{x \in G \ ; \ x = ha, \text{para algum} \ \ h \in H\}$

Analogamente à relação $\sim_E$, a relação $\sim_D$ particiona o grupo G. São as **Classes Laterais à direita de H contendo a.**

- Dado $a \in G$, quem são os elementos que se relacionam com a pela relação $\sim_D$?
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x \sim_D a\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} \in H\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ xa^{-1} = h, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- $\overline{a} = \{x \in G \ ; \ x = ha, \text{para algum} \ \ h \in H\}$
- Denotaremos esta classe por Ha.

Classes de Equivalência geradas por $\sim_D$

Exemplo

Exiba as classes laterais à direita do subgrupo $3\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

Classes de Equivalência

Exemplo

Considere o grupo S_3*, das bijeções de* $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$.
Verifiquemos as classes laterais à direita e à esquerda

Classes de Equivalência

Exemplo

Considere o grupo S_3, das bijeções de $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$. Verifiquemos as classes laterais à direita e à esquerda

- Como já sabemos, $S_3 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ é um grupo, onde

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Classes de Equivalência

Exemplo

Considere o grupo S_3, das bijeções de $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$. Verifiquemos as classes laterais à direita e à esquerda

- Como já sabemos, $S_3 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ é um grupo, onde

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontremos o subgrupo de S_3 gerado por f_1.

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Portanto, $H = \langle f_1 \rangle = \{f_0, f_1\}$ é um subgrupo de $G = S_3$.

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Portanto, $H = \langle f_1 \rangle = \{f_0, f_1\}$ é um subgrupo de $G = S_3$.
- Vamos determinar aH e Ha onde $a = f_2$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Portanto, $H = \langle f_1 \rangle = \{f_0, f_1\}$ é um subgrupo de $G = S_3$.
- Vamos determinar aH e Ha onde $a = f_2$.
- $aH = \{ah \ ; \ h \in H\} = \{f_2 \circ e, f_2 \circ f_1\} = \{f_2, f_3\}$

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Portanto, $H = \langle f_1 \rangle = \{f_0, f_1\}$ é um subgrupo de $G = S_3$.
- Vamos determinar aH e Ha onde $a = f_2$.
- $aH = \{ah\ ;\ h \in H\} = \{f_2 \circ e, f_2 \circ f_1\} = \{f_2, f_3\}$
- $Ha = \{ha\ ;\ h \in H\} = \{e \circ f_2, f_1 \circ f_2\} = \{f_2, f_4\}$

Classes de Equivalência

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $f_1 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Portanto, $H = \langle f_1 \rangle = \{f_0, f_1\}$ é um subgrupo de $G = S_3$.
- Vamos determinar aH e Ha onde $a = f_2$.
- $aH = \{ah \; ; \; h \in H\} = \{f_2 \circ e, f_2 \circ f_1\} = \{f_2, f_3\}$
- $Ha = \{ha \; ; \; h \in H\} = \{e \circ f_2, f_1 \circ f_2\} = \{f_2, f_4\}$
- **Conclusão: nem sempre ocorre $aH = Ha$!**

Igualdade entre as classes laterais

Teorema

Quando G é um grupo abeliano, então $aH = Ha$ para qualquer subgrupo H de G. Neste caso, falaremos apenas em **Classes Laterais** *de H contendo a.*

Exemplos

Pelo que já vimos anteriormente:

Exemplos

Pelo que já vimos anteriormente:

- $G = (\mathbb{R}, +)$ e $H = 2\mathbb{Z}$: sendo G abeliano, $\frac{1}{3}H = H\frac{1}{3}$.

Exemplos

Pelo que já vimos anteriormente:

- $G = (\mathbb{R}, +)$ e $H = 2\mathbb{Z}$: sendo G abeliano, $\frac{1}{3}H = H\frac{1}{3}$.
- $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ e $H = \langle \overline{2} \rangle$: $aH = Ha$ para todo $a \in \mathbb{Z}_8$.

Exemplos

Pelo que já vimos anteriormente:

- $G = (\mathbb{R}, +)$ e $H = 2\mathbb{Z}$: sendo G abeliano, $\frac{1}{3}H = H\frac{1}{3}$.
- $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ e $H = \langle \overline{2} \rangle$: $aH = Ha$ para todo $a \in \mathbb{Z}_8$.
- $G = (\mathbb{Z}, +)$ e $H = 3\mathbb{Z}$: $aH = Ha$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Exemplo

Exemplo

Encontre a partição de $(\mathbb{Z}_6, +)$ *em classes laterais do subgrupo* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

Exemplo

Exemplo

Encontre a partição de $(\mathbb{Z}_6, +)$ *em classes laterais do subgrupo* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

- Para $a = \overline{0}$: $aH = \overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.

Exemplo

Encontre a partição de $(\mathbb{Z}_6, +)$ *em classes laterais do subgrupo* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

- Para $a = \overline{0}$: $aH = \overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.
- Para $a = \overline{1}$: $aH = \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$.

Exemplo

Exemplo

Encontre a partição de $(\mathbb{Z}_6, +)$ *em classes laterais do subgrupo* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

- Para $a = \overline{0}$: $aH = \overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.
- Para $a = \overline{1}$: $aH = \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$.
- Para $a = \overline{2}$: $aH = \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$.

Exemplo

Exemplo

Encontre a partição de $(\mathbb{Z}_6, +)$ *em classes laterais do subgrupo* $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

- Para $a = \overline{0}$: $aH = \overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$.
- Para $a = \overline{1}$: $aH = \overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$.
- Para $a = \overline{2}$: $aH = \overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$.
- $(\overline{0} + H) \cup (\overline{1} + H) \cup (\overline{2} + H) = \mathbb{Z}_6$

Teorema de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então, a ordem de H é um divisor da ordem de G.

Teorema de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então, a ordem de H é um divisor da ordem de G.

- Sendo G finito, segue que aH ou Ha tem o mesmo número de elementos de H, digamos, k;

Teorema de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então, a ordem de H é um divisor da ordem de G.

- Sendo G finito, segue que aH ou Ha tem o mesmo número de elementos de H, digamos, k;
- Como vimos, $G = a_1H \cup a_2H \cup \ldots \cup a_rH$ (união disjunta);

Teorema de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então, a ordem de H é um divisor da ordem de G.

- Sendo G finito, segue que aH ou Ha tem o mesmo número de elementos de H, digamos, k;
- Como vimos, $G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_rH$ (união disjunta);
- Portanto, se n é a ordem de G, então $n = r.k$.

Teorema de Lagrange

Teorema (Lagrange)

Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então, a ordem de H é um divisor da ordem de G.

- Sendo G finito, segue que aH ou Ha tem o mesmo número de elementos de H, digamos, k;
- Como vimos, $G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_rH$ (união disjunta);
- Portanto, se n é a ordem de G, então $n = r.k$.
- Conclusão: $k|n$.

$\blacksquare$