1 Zeros de Funções

1.1 Conceitos Básicos

Muito frequentemente precisamos determinar um valor ϵ para o qual o valor de alguma função é igual a zero, ou seja: $f(\epsilon) = 0$.

Exemplo 1.1 *Suponha que certo produto é vendido a vista por um preço R$ 500,00 ou em seis prestações mensais, sem entrada, de R$ 100,00. Nosso problema pode ser: Qual a taxa de juros cobrada nessa transação?*

1. Nosso primeiro problema seria: Como equacionar esse problema?
2. E o segundo: como resolvê-lo?

Note que o comprador pagará o produto do seguinte modo:

1. Zero de entrada;
2. R$ 100,00 no final do primeiro mês;
3. R$ 100,00 no final do segundo mês;
4. R$ 100,00 no final do terceiro mês;
5. R$ 100,00 no final do quarto mês;
6. R$ 100,00 no quinto mês;
7. R$ 100,00 no sexto mês.

Se i é a taxa de juros cobrada, temos que os valores atuais de cada uma dessas parcela é dada por:

1. Zero de entrada;
2. R$ $\frac{100{,}00}{1+i}$, pois só rende juros um mês;
3. R$ $\frac{100{,}00}{(1+i)^2}$, pois rende juros durante dois meses;
4. R$ $\frac{100{,}00}{(1+i)^3}$, pois rende juros durante três meses;
5. R$ $\frac{100{,}00}{(1+i)^4}$, pois rende juros durante quatro meses;
6. R$ $\frac{100{,}00}{(1+i)^5}$, pois rende juros durante cinco meses;
7. R$ $\frac{100{,}00}{(1+i)^6}$, pois rende juros durante os seis meses.

Fazendo

$$x = \frac{1}{1+i}$$

temos:

$$0 + 100x + 100x^2 + 100x^3 + 100x^4 + 100x^5 + 100x^6 = 500$$

Ou o que é equivalente:

$$100(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5) = 0$$

Ou ainda

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5 = 0$$

O problema é: como podemos encontrar alguma raíz de um polinômio de grau supeior a 4?

Um problema também não muito simples de resolver, seria encontrar uma raíz de uma equação do tipo:

Exemplo 1.2

$$x^3\ e^{-2x} + ln(x) = 0$$

Alguns teoremas, no entanto, nos apontam caminhos rumo a uma solução.

Teorema 1.1 *Se uma função contínua f assume valores de sinais oposto nos pontos extremos do intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $f(\alpha) \bullet f(\beta) < 0$. Então existirá pelo menos um valor $\varepsilon \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(\varepsilon) = 0$.*

Nos nossos dois exemplos temos:

Se

$$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5$$

Então $f(0) = -5$ e $f(1) = 1$. Pelo teorema (1.1) temos que existe um $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ tal que $f(\varepsilon_1) = 0$

Se

$$g(x) = x^3\ e^{-2x} + cos(x)\ ln(x)$$

Então $g(0,1) \approx -2,29$ e $f(1) = 0,14$. Mais uma vez recorrendo ao teorema (1.1) temos que existe um $\varepsilon_2 \in (0,1)$ tal que $g(\varepsilon_2) = 0$

Um importante corolário do teorema (1.1) é o seguinte:

Corolário 1.1 *A raiz ε será definida e única se a derivada primeira $f'(x)$ existir e preservar o sinal dentro do intervalo (α, β), isto é: ou se $f'(x) > 0$ ou se $f'(x) < 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$.*

Note que podemos usar este resultado para garantir que para o nosso primeiro exemplo, existe apenas um $\varepsilon_1 \in (0,1)$.

Vejamos o próximo teorema:

Teorema 1.2 (Teorema fundamental da Álgebra) *Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, desde que cada raíz seja contada de acordo com a sua multiplicidade.*

Exemplo 1.3 *Vamos verificar se $\varepsilon = 2$ é raíz da equação algébrica:*

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$$

Antes de resolvê-lo, vejamos o seguinte conceito:

Uma raíz ε de uma equação algébrica

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tem multiplicidade m, se:

$$P(\varepsilon) = P'(\varepsilon) = P''(\varepsilon) = \ldots = P^{m-1}(\varepsilon) = 0$$

mas

$$P^m(\varepsilon) \neq 0$$

Voltemos à solução de nosso exemplo. Temos:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^4 - 5 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 - 8 \\ &= 16 - 5 \times 8 + 6 \times 4 + 4 \times 2 - 8 \\ &= 16 - 40 + 24 + 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\varepsilon = 2$ é, de fato, raíz da equação.

Temos também que:

$$P'(x) = 4\,x^3 - 15\,x^2 + 12\,x + 4$$

Daí

$$\begin{aligned} P'(2) &= 4 \times 2^3 - 15 \times 2^2 + 12 \times 2 + 4 \\ &= 4 \times 8 - 15 \times 4 + 12 \times 2 + 4 \\ &= 32 - 60 + 24 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P''(x) = 12\,x^2 - 30\,x + 12$$

Daí

$$\begin{aligned} P''(2) &= 12\;2^2 - 30\;2 + 12 \\ &= 12 \times 4 - 30 \times 2 + 12 \\ &= 48 - 60 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P'''(x) = 24\,x - 30$$

E assim:

$$\begin{aligned} P'''(2) &= 24 \times 2 - 30 \\ &= 48 - 30 \\ &= 18 \neq 0 \end{aligned}$$

Daí a multiplicidade da raí $\varepsilon = 2$ é $m = 3$.

Teorema 1.3 *Se os coeficientes de uma equação algébrica são reais, então as raízes complexas desta equação são complexos conjugados em pares, isto é, se $\varepsilon_1 = \alpha + i\beta$ é uma raí de multiplicidade m, então o número $\varepsilon_2 = \alpha - i\beta$ também é uma raí de multiplicidade m.*

Este teorema fornece um importante corolário.

Corolário 1.2 *Uma equação algébrica de grau ímpar com coeficiente reais tem, no mínimo, uma raíz real.*

1.2 Limites das raízes

O método numérico de busca por raízes consiste em duas etapas que são

1. Primeiro achamos um intervalo que contenha uma e somente uma raíz da equação $f(x) = 0$;
2. Depois construimos uma sequência de aproximações para o valor de ε.

Note que este trabalho é um pouco artesanal, pois muitas vezes não vazemos a menor idéia onde a raíz possa está.

Para as equações algébricas temos um teorema que auxilia na missão de obtenção de um intervalo que contenha raízes.

Teorema 1.4 (Teorema de Lagrange) *Sejam $a_n > 0, a_o \neq 0$ e k $0 \leq k \leq n-1$ o maior ídice dos coeficientes negativos do polinômio $P(x)$. Então, para o limite superior das raízes positivas da equanção $P(x) = 0$ podemos tomar o número :*

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

Exemplo 1.4 *Obter o limite superior para as raízes positivas da equação algébrica:*

$$P(x) = 160x^5 - 360x^4 - 8670x^3 + 5822,5x^2 + 39791,25x - 20250$$

Temos: $B = 20250$, $a_n = 160$ e $k = 4$. Daí

$$\begin{aligned} L &= 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \\ &= 1 + \sqrt[5-4]{\frac{20250}{160}} \\ &\approx 127,57 \end{aligned}$$

Logo pelo teorema de Lagrange é possível concluir que todas as raízes da equação algébrica dada no exemplo (1.4) são, no máximo, iguais a $L = 127,57$.

Para obter o limite inferior para as raízes positivas considere o polinômio:

$$P_1(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$$

Podemos usar o teorema de Lagrange para encontrar um limite superior para as raízes positivas da equação $P_1(x) = 0$.

Suponha que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ sejam as raízes da equação $P(x) = 0$. Logo podemos escrever:

$$P(x) = a_n(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\ldots(x - \varepsilon_n)$$

Assim

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x^n \left[a_n \left(\frac{1}{x} - \varepsilon_1\right)\left(\frac{1}{x} - \varepsilon_2\right)\dots\left(\frac{1}{x} - \varepsilon_n\right)\right] \\
&= x^n \left[a_n \left(\frac{1 - x\varepsilon_1}{x}\right)\left(\frac{1 - x\varepsilon_2}{x}\right)\dots\left(\frac{1 - x\varepsilon_n}{x}\right)\right] \\
&= a_n \left(1 - x\varepsilon_1\right)\left(1 - x\varepsilon_2\right)\dots\left(1 - x\varepsilon_n\right)
\end{aligned}
$$

Note que as raízes de $P_1(x)$ são $\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{1}{\varepsilon_2}, \dots, \frac{1}{\varepsilon_3}$

Ou seja, existe uma relação inversa entre as raízes de $P(x)$ e $P_1(x)$ de tal modo que a maior raíz de $P_1(x)$ é a inversa da menor raíz de $P(x)$.

Assim se L_1 é o limite superior para as raízes positivas de $P_1(x)$ então $\frac{1}{L_1}$ será o limite inferior para as raízes positivas de $P(x)$.

Dessa forma se ε é raíz de $P(x)$, então:

$$
\frac{1}{L_1} \leq \varepsilon \leq L
$$

Exemplo 1.5 *Obter o limite inferior para as raízes positivas da equação algébrica:*

$$
P(x) = 160x^5 - 360x^4 - 8670x^3 + 5822,5x^2 + 39791,25x - 20250
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= x^5 \left[160\left(\frac{1}{x}\right)^5 - 360\left(\frac{1}{x}\right)^4 - 8670\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5822,5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 39791,25\left(\frac{1}{x}\right) - 20250\right] \\
&= 160 - 360x - 8670x^2 + 5822,5x^3 + 39791,25x^4 - 20250x^5
\end{aligned}
$$

Note que ainda não podemos usar o teorema de Lagrange, pois $-20250 < 0$. Mas as raízes de $P_1(x)$ são as mesmas de $-P_1(x)$, e assim ao encontrar um limite superior para as raízes positivas de $-P_1(x)$ estamos encontrado o limite superior para as raízes positivas de $P_1(x)$ e consequentemente o limite inferior para as raízes positivas de $P(x)$. Daí:

$$
-P_1(x) = 20250x^5 - 39791,25x^4 - 5822,5x^3 + 8670x^2 + 360x - 160
$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= 1+\sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}\\
&= 1+\sqrt[5-4]{\frac{39791}{20250}}\\
&= 1+\frac{39791}{20250}\\
&\approx 2,97
\end{aligned}$$

E assim as raízes ε^+ positivas de $P(x)$ estão entre:

$$\frac{1}{2,97}\leq \varepsilon^+ \leq 127,57$$

Ou melhor:

$$0,33\leq \varepsilon^+ \leq 127,57$$

Para obter limites para as raízes negativas usamos polinômios auxiliares como:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= P(-x)\\
&= 160(-x)^5-360(-x)^4-8670(-x)^3+5822,5(-x)^2+39791,25(-x)-20250\\
&= -160(x)^5-360(x)^4+8670(x)^3+5822,5(x)^2-39791,25(x)-20250
\end{aligned}$$

Também nesse caso não podemos usar o teorema de Lagrange, como as raízes de $-P_2(x)$ são as mesmas de $P_2(x)$, então procuramos as raízes de $P_2(x)$.

$$-P_2(x)=160(x)^5+360(x)^4-8670(x)^3-5822,5(x)^2+39791,25(x)+20250$$

Se L_2 é o limite superior para as raíes positivas de $-P_2(x)$, então:

$$\begin{aligned}
L_2 &= 1+\sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}\\
&= 1+\sqrt[5-3]{\frac{8670}{160}}\\
&\approx 8,37
\end{aligned}$$

Devemos observar que a relação entre as raízes de $P_2(x)$ e $P(x)$ é que as raízes positivas de um são as negativas do outro e vice-versa. Dessa forma se L_2 é o limite superior para as raízes positivas de $P_2(x)$ então $-L_2$ é o limite infeior para as raízes negativas de $P(x)$.

Para encontrar o limite superior para as raízes negativas definimos

$$P_3(x)=x^nP\left(-\frac{1}{x}\right)=x^nP_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

É fácil observar que a maior raí positiva de $P_3(x)$ é o inverso simétrico de $P(x)$. Daí se L_3 é o limite superior para as raízes positivas para $P_3(x$ então $-\frac{1}{L_3}$ é o limite superior para as raízes negativas de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x^5\left[160\left(-\frac{1}{x}\right)^5 - 360\left(-\frac{1}{x}\right)^4 - 8670\left(-\frac{1}{x}\right)^3 + 5822,5\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 39791,25\left(-\frac{1}{x}\right) - 20250\right] \\ &= -160 - 360x + 8670x^2 + 5822,5x^3 - 39791,25x^4 - 20250x^5 \end{aligned}$$

Como nos casos anteriores, também não podemos usar o teorema de Lagrange, e assim como nos casos anteriores usamos o polinômio $-P_3(x)$ que tem as mesmas raízes de $P_3(x)$. Seja L_3 o limite superior para as raízes positivas de $-P_3(x)$.

Como:

$$-P_3(x) = 20250x^5 + 39791,25x^4 - 5822,5x^3 - 8670x^2 + 360x + 160$$

Temos:

$$\begin{aligned} L_3 &= 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}} \\ &= 1 + \sqrt[5-3]{\frac{8670}{20250}} \\ &\approx 1,66 \end{aligned}$$

Assim o limite superior para as raízes negativas de $P(x)$ é $-\frac{1}{1,66} \approx -0,60$

E dessa forma

$$-8,37 \leq \varepsilon^- \leq -0,6$$

Teorema 1.5 (Regra de Sinais de Descartes) *O número de raízes reais positivas n^+ de uma equação algb́rica é igual ao número de variações de sinais na sequência dos coeficientes, ou menor que este número por um inteiro par, sendo uma raiz de multiplicidade m contado como m raízes e não sendo contados os coeficientes iguais a zero.*

Corolário 1.3 *Se os coeficientes de uma equação algébrica são diferentes de zero, então, o número de raízes reais negativas n^- (contando multiplicidade) é igual ao número de permanência de sinais na sequência dos seus coeficientes, ou é menor que este número por um inteiro par.*

Exemplo 1.6 *O número de raizes positivas n^+ e negativas n^- de nosso polinômio $P(x)$ é igual então a: $n^+ = 3$ ou 1 e $n^- = 2$ ou 0*

1.3 Métodos de refinamento das raízes

1.3.1 Método da Bissessão

Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e se $f(a) \bullet f(b) < 0$, tomamos $x_0 \frac{a+b}{2} =$. Se $f(a) \bullet f(x_0) < 0$, então $\varepsilon \in (a, x_0)$ caso contrário $\varepsilon \in (x_0, b)$. Repetimos esse procedimento com o novo intervalo até que a raíz seja obtida ou até que atinja uma tolerância predeterminada.

Exemplo 1.7 *Obter pelo menos um zero da equação algébrica dada nosso exemplo (1.4)*

$$P(x) = 160x^5 - 360x^4 - 8670x^3 + 5822,5x^2 + 39791,25x - 20250$$

Vimos que esta equação tem todas as suas raízes positivas no intervalo: $(0,33; 127,57)$. Vimos também que o número máximo dessas raízes é 3. Para isolá-las vamos usar uma planilha eletrônica.

1.3.2 Método das Cordas

Considere uma função contínua que tenha derivada segunda com sinal constante no intervalo $[a, b]$, sendo que $f(a) \bullet f(b) < 0$ e que existe somente um número $varepsilon \in [a, b]$ tal que $f(\varepsilon) = 0$.

Temos quatro casos a avaliar:

$$f''(x) > 0 \text{ e } \begin{cases} f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0 & \text{Caso I} \\ f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0 & \text{Caso II} \end{cases}$$

$$f''(x) < 0 \text{ e } \begin{cases} f(a) < 0 \text{ e } f(b) > 0 & \text{Caso III} \\ f(a) > 0 \text{ e } f(b) < 0 & \text{Caso IV} \end{cases}$$

Podemos construir uma sequência de aproximações para a raiz de f do seguinte modo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x)}(x_n - c)$$

Onde o ponto fixado $c = (a \text{ ou } b)$ é aquele no qual o sinal da função $f(x)$ coincide com o sinal da sua derivada segunda $f''(x)$.

Exemplo 1.8 *Para este caso veremos exemplos envolvendo três meios:*

1. *Uma planilha eletrônica;*
2. *O software matemático/estatístico R;*
3. *Uma calculadora científica*

Como ilustração usaremos a função g dada no exemplo 1.2
Ou seja:

$$g(x) = x^3\ e^{-2x} + ln(x) = 0$$

Note que

$$g'(x) = 3x^2\ e^{-2x} - 2\ e^{-2x}\ x^3 + \frac{1}{x}$$

$$g''(x) = 6x\ e^{-2x} - 12x^2\ e^{-2x} + 4\ e^{-2x}\ x^3 - \frac{1}{x^2}$$

Note que $g(0,2) < 0$ e $g''(0,2) < 0$ e assim $c = 0,2$ e $x_0 = 1,0$.

Vamos obter uma raíz usando o método das cordas utilizando os recursos indicados.

1.3.3 Método de Newton

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e ε o seu único zero neste intervalo; as derivadas $f'(x)$ tal que $f'(x) \neq 0$ e $f''(x)$ também contínuas no intervalo. Uma sequência de aproximações x_n para ε é construída pela expressão:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

A sequência obtida pelo método de Newton converge se $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal em (a,b) e x_0 seja tal que $f(x_0) \bullet f''(x_0) > 0$. Vamos usar esse método para obter a raíz da equação:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5 = 0$$

Equação obtida ao buscar a solução do exemplo 1.1.

1.3.4 Método da Iteração Linear

Se f é uma função contí no intervalo $[a,b]$ e ε um número pertencente a este intervalo tal que $f(\varepsilon) = 0$. Partindo da equação $f(x) = 0$ obtemos: $F(x) = x$. $F(x)$ é chamada funçco de iteração. Se x_0 é uma primeira aproximação para ε então podemos obter: $x_{n+1} = F(x_n)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Esta sequência converge para ε se $|F'(x)| < 1$ para todo $x \in [a,b]$ e se $x_0 \in [a,b]$.

Exemplo 1.9 *Obter uma raíz da função:*

$$x^3\ e^{-2x} + ln(x)$$